

Vektoriteration

Andreas Hahn

29. Januar 2009

1 Zweck

Sogenannte Vektoriterationsverfahren sind Verfahren zur Eigenwert- und Eigenvektor-Ermittlung von Matrizen. In der Vorlesung wurde auf drei Verfahren speziell eingegangen.

2 Verfahren für den größten Eigenwert

2.1 Potenzmethode / klassische Vektoriteration

Die Potenzmethode sucht den betragsgrößten Eigenwert einer allgemeinen $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ Matrix.

Wir definieren einen Startvektor $u_0 \in \mathbb{C}^n$ mit $|u_0| = 1$ und $\|\cdot\|$ sei eine Vektornorm. Dann iterieren wir für $k > 0$:

$$\begin{aligned}v_{k+1} &= A u_k \\ \mu_{k+1} &= \|v_{k+1}\| \\ u_{k+1} &= \frac{v_{k+1}}{\mu_{k+1}}\end{aligned}$$

μ_k konvergiert für $k \rightarrow \infty$ gegen den größten Eigenwert von A und u_k gegen den zugehörigen Eigenvektor.

In der Vorlesung wurde angenommen, dass der größte Eigenwert einfache Vielfachheit hat. Dies ist aber keine notwendige Voraussetzung.¹

2.2 Von-Mises-Iteration

Die Von-Mises-Iteration funktioniert nur für symmetrische Matrizen $A \in \mathbb{C}^{n,n}$, und es muss gelten $\|\cdot\| = |\cdot|$.

Auch hier benötigen wir wieder einen Startvektor $u_0 \in \mathbb{R}^n$ und iterieren

$$\begin{aligned}v_{k+1} &= A u_k \\ u_{k+1} &= \frac{v_{k+1}}{|v_{k+1}|} \\ \mu_{k+1} &= u_k \cdot A u_k = u_k v_{k+1}\end{aligned}$$

¹M. Hermann: Numerische Mathematik (S.149)

μ_k konvergiert dann wieder gegen den größten Eigenwert für $k \rightarrow \infty$ und u_k gegen den zugehörigen Eigenvektor.

2.3 Eigenschaften

- Konvergenzgeschwindigkeit: Seien $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|$ die Eigenwerte der Matrix A .

- Potenzmethode: $||\mu_k| - |\lambda_1|| \leq \frac{2|\lambda_1|}{|u_0 z_1|} \left(\frac{|\lambda_2|}{|\lambda_1|} \right)^k$

- Von-Mises-Iteration: $|\mu_k - \lambda_1| \leq \frac{8|\lambda_1|}{|u_0 z_1|^2} \left(\frac{|\lambda_2|}{|\lambda_1|} \right)^{2(k-1)}$

Die Von-Mises-Iteration konvergiert also bei wachsendem k für symmetrische Matrizen erheblich schneller.

- Für den Startvektor muss gelten: $u_0 z_1 \neq 0$, mit z_1 Eigenvektor zum größten Eigenwert. Das ist in der Praxis aber normalerweise durch Rundungsfehler ohnehin gegeben.

3 Inverse Vektoriteration mit Shift

Für die Suche nach dem kleinsten Eigenwert einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ wird die inverse Vektoriteration eingesetzt. Dazu muss A invertierbar sein.

Suchen wir einen beliebigen Eigenwert kann das mit Hilfe eines Shiftes $\hat{\lambda} \in \mathbb{R}$ ($\lambda \notin \text{spec}(A)$) und der Suche nach dem kleinsten Eigenwert von $A - \hat{\lambda} \text{Id}$ geschehen.

Hier wird dann mit Hilfe der Potenzmethode der größte Eigenwert von $(A - \hat{\lambda} \text{Id})^{-1}$ gesucht:

$$(A - \lambda \text{Id})v_{k+1} = u_k (\text{Lösung eines Gleichungssystems})$$

$$u_{k+1} = \frac{v_{k+1}}{|v_{k+1}|}$$

$$\mu_{k+1} = u_k \cdot (A - \lambda \text{Id})^{-1} u_k = u_k \cdot v_{k+1}$$

Das ergibt aber einige Probleme:

- In jedem Durchgang muss mit viel Rechenaufwand ein Gleichungssystem gelöst werden. Das geht in der Praxis nur näherungsweise. Man kann sich aber mit der einmaligen Durchführung der LR-Zerlegung behelfen und senkt damit den Aufwand für das Verfahren von $O(n^3)$ auf $O(n^2)$.
- Die Durchführung des Verfahrens mit variablem Shift (z.B. $\lambda = \mu_k$ im k -ten Schritt) heißt *Rayleigh-Quotienten-Iteration* und konvergiert lokal quadratisch (A muss nicht symmetrisch sein.)

Für hermitesche Matrizen konvergiert sie sogar lokal kubisch.

(Beim Beispiel $A - \mu_k \text{Id}$ wird die Matrix „zunehmend singular“, die Berechnung des Eigenvektors bleibt aber stabil.)

Zu bedenken ist, dass die LR-Zerlegung damit nur für einige Iterationen nutzbar ist und muss dann wiederholt werden muss.